

Задатак 1: Центрифугална пумпа познате карактеристике при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ пребацује воду из резервоара A у резервоар B кроз цевовод приказан на слици. Оба резервоара су отворена. Коте (надморске висине) нивоа воде у резервоарима приказане су на слици.

Карактеристике уисне деонице цевовода:

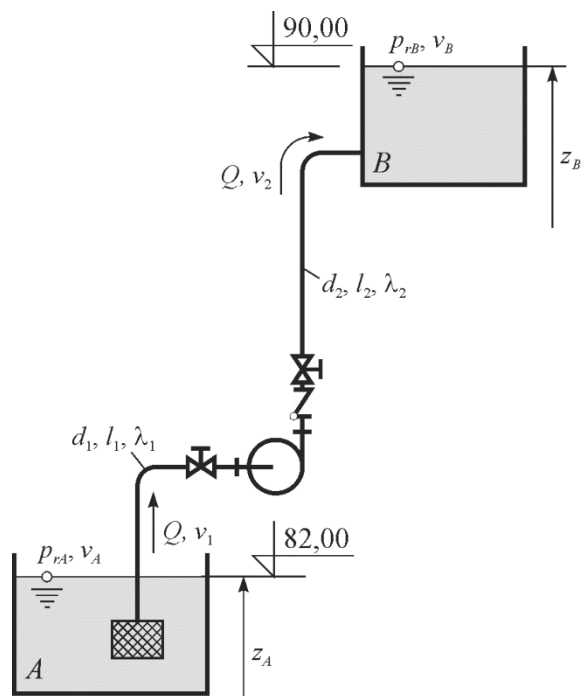
$$d_1 = 100 \text{ mm}, \quad l_1 = 10 \text{ m}, \\ \lambda_1 = 0,025, \quad \Sigma\zeta_1 = 2$$

Карактеристике потисне деонице цевовода:

$$d_2 = 80 \text{ mm}, \quad l_2 = 95 \text{ m}, \\ \lambda_2 = 0,027, \quad \Sigma\zeta_2 = 12.$$

Одредити:

1. Проток, напор и потребну снагу пумпе при брзини обртања $n = 1450 \text{ min}^{-1}$.
2. Колика треба да буде брзина обртања пумпе да би се проток повећао за 25 %? Колика је тада потребна снага пумпе?
3. Проток, напор и потребну снагу пумпе при брзини обртања $n = 1300 \text{ min}^{-1}$.



Радне карактеристике пумпе при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$:

Q [L/s]	0	2	4	6	8	10	12	14
Y [J/kg]	147	149	149	146	137	122	100	76
η [%]	0	40	63	75	75	70	58	42

Решење (1) – рад пумпе у простом цевоводу

Задатак се решава применом Бернулијеве једначине (Б.Ј.) за тачке на површини воде у резервоарима A и B (види дискусију 1):

$$\frac{p_a + p_{rA}}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A + Y_p = \frac{p_a + p_{rB}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \sum \Delta y_{gs} + \sum \Delta y_{gp} \quad (1)$$

Овде су p_{rA} и p_{rB} релативни притисци који владају на површини воде у резервоарима A и B ($p_r = +p_m$ ако се ради о натпритиску, $p_r = -p_v$ ако се ради о потпритиску). Наравно, ако је заиста реч о резервоарима за воду, они су по правилу отворени према атмосфери тако да је тада $p_r = 0$. Међутим ако су на месту резервоара некакви процесни судови, котлови или друга опрема под притиском, релативни притисак који у њима влада мора бити узет у обзир.

Чланови v_A и v_B у једначини (1) представљају брзине струјања у резервоарима ако те брзине нису занемарљиво мале (нпр. ако је „резервоар“ заправо речни ток), а z_A и z_B су геодезијске висине нивоа воде у резервоарима. Са Y_p означен напор пумпе а са Δy_{gs} и Δy_{gp} губици специфичне струјне енергије (хидраулички губици) у усисном (s) и потисном (p) цевоводу. Атмосферски притисак (p_a) који фигурише са обе стране једначине (1) може да се скрати тако да Б.Ј. увек важи и за релативне притиске те се једноставности ради тако и пише:

$$\frac{p_{rA}}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A + Y_p = \frac{p_{rB}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \sum \Delta y_{gs} + \sum \Delta y_{gp} \quad (2)$$

Рашчлаивањем хидрауличких губитака у усисном и потисном цевоводу на губитке на трење и локалне губитке^(види дискусију 2) једначина (2) добија развијен облик:

$$\frac{p_{rA}}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A + Y_p = \frac{p_{rB}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{v_1^2}{2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{v_2^2}{2} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \quad (3)$$

У хидрауличким проблемима по правилу се уз Бернулијеву једначину користи и једначина континуитета која даје везу између брзина струјања у усисном и потисном цевоводу:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \rightarrow \quad v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \quad (4)$$

Једначине (3) и (4), уз карактеристику пумпе $Y_p(Q_p)$, која је у задатку дата табеларно, чине одређен систем од три нелинеарне алгебарске једначине по непознатом напору пумпе Y_p и брзинама струјања v_1 и v_2 . Међутим, са обзиром да у пумпним системима брзине струјања по правилу нису примарне непознате него су то протоци, то је од интереса да се добијени систем једначина преформулише тако да у њему управо проток експлицитно фигурише као непозната величина. У том циљу, једначину континуитета (4) треба искористити као везу између протока и брзина струјања у цевоводима:

$$Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}, \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}$$

Заменом добијених веза (чланови који се односе на брзине струјања у резервоарима остају непромењени са обзиром да то нису брзине струјања у цевоводима) добија се:

$$\frac{p_{rA}}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A + Y_p = \frac{p_{rB}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{8Q^2}{\pi d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \quad (5)$$

Ако се једначина (5) преуреди тако да на левој страни знака једнакости фигурише само напор пумпе коначно се добија:

$$Y_p = \frac{p_{rB} - p_{rA}}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) + \frac{8Q^2}{\pi d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) \quad (6)$$

Једначина (6) и табеларна карактеристика пумпе $Y_p(Q_p)$ чине сада систем од две нелинеарне алгебарске једначине по непознатом протоку и напору пумпе. Овај систем једначина могуће је решити нумерички или графички. У наставку се приказује графичко решење.

Израз на десној страни једначине (6) уобичајено се назива „карактеристика цевовода“:

$$Y_c(Q) = \frac{P_{rB} - P_{rA}}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) + \frac{8Q^2}{\pi d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right)$$

па се може рећи да пумпни систем у устаљеном режиму ради са протоком Q при којем је напор који остварује пумпа једнак напору који захтева цевовод:

$$Y_p(Q) = Y_c(Q)$$

У конкретном проблему, оба резервоара су отворена према атмосфери па је $p_{rA} = p_{rB} = 0$, а брзине струјања у резервоарима су по правилу занемарљиве ($v_A \approx 0$, $v_B \approx 0$). На тај начин једначина (6) добија једноставнији облик, који се иначе најчешће и среће у пракси:

$$Y_p(Q) = g(z_B - z_A) + \frac{8Q^2}{\pi d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) = Y_c(Q) \quad (7)$$

Члан $g(z_B - z_A) = const$ у карактеристици цевовода $Y_c(Q)$ представља корисни део напора. Сама разлика нивоа воде у резервоарима ($z_B - z_A$) често се у пракси назива „геодезијска висина дизања“ и означава се са H_{geo} .

Друга два члана у карактеристици цевовода свODE на облик $\Delta u_g = bQ^2$ и то су хидраулички губици у цевоводу или дисипативни део напора.

Заменом у једначину (7) конкретних вредности за z_A , z_B , d_1 , l_1 , λ_1 , $\sum \zeta_1$, d_2 , ..., које су дате у задатку, добија се:

$$Y_p(Q) = 78,453 + 0,9084Q^2 = Y_c(Q)$$

где је коефицијент уз Q^2 прерачунат тако да се проток уноси у L/s а не у m³/s!

Радне карактеристике пумпе $Y_p(Q_p)$, $\eta_p(Q_p)$ и карактеристика цевовода $Y_c(Q)$ приказане су графички на слици у прилогу. Сагласно једначини (7), у пресеку радне карактеристике пумпе и карактеристике цевовода добија се решење, односно тзв. радна тачка система RT_1 (пумпе и цевовода).

Из радне тачке RT_1 читавају се проток, напор и степен корисности пумпе на основу којих се коначно срачунава тражена потребна снага:

$$RT_1 \rightarrow \quad Y_{p1} = 136,9 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p1} = Q_1 = 8,0 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad \eta_{p1} = 75,0 \%$$

$$P_{p1} = \frac{\rho Q_{p1} Y_{p1}}{\eta_{p1}} = 1,46 \text{ kW}$$

Решење (2) – регулисање пумпе на задати проток променом брзине обртања

Радна тачка RT_2 добија се на карактеристици цевовода $Y_c(Q)$ из услова задатака да је проток Q_2 за 25 % већи од протока Q_1 :

$$Q_2 = 1,25Q_1 = 1,25 \cdot 8 \text{ L/s} = 10 \text{ L/s} \quad \rightarrow \quad RT_2$$

Кроз радну тачку RT_2 мора да прође „нова“ радна карактеристика пумпе $Y_p^*(Q_p)$ при непознатој брзини обртања n_2 , односно пумпа треба да оствари следеће радне параметре:

$$RT_2 \rightarrow \quad Y_{p2} = 169,7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p2} = Q_2 = 10 \text{ L/s}$$

Да би се одредила брзина обртања n_2 при којој дата пумпа може да оствари тражене радне параметре, неопходно је да се на „оригиналној“ радној карактеристици пумпе $Y_p(Q_p)$ при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ пронађе тзв. „слична тачка“ $ST(Q_s, Y_s)$, односно она тачка која се при промени брзине обртања пумпе $n \rightarrow n_2$ пресликава баш у радну тачку $RT_2(Q_{p2}, Y_{p2})$. Из теорије сличности (види дискусију 3) познато је да се при промени брзине обртања све тачке на радној карактеристици пумпе пресликавају по одговарајућим „параболама сличности“ које све пролазе кроз координатни почетак ($Q = 0, Y = 0$). Другим речима, ако се кроз радну тачку пумпе $RT_2(Q_{p2}, Y_{p2})$ повуче парабола сличности облика

$$Y_s(Q_s) = \left(\frac{Y_{p2}}{Q_{p2}^2} \right) Q_s^2 = 1,6891 Q_s^2$$

у пресеку тако добијене параболе и радне карактеристике пумпе $Y_p(Q_p)$ при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$, добија се слична тачка ST_2 радне тачке $RT_2(Q_{p2}, Y_{p2})$. Из сличне тачке читава се проток:

$$ST_2 \rightarrow \quad Q_{s2} = 8,8 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad (\text{или напор} \rightarrow \quad Y_{s2} = 131,6 \frac{\text{J}}{\text{kg}})$$

Коначно, тражена брзина обртања n_2 добија се из закона сличности:

$$Q_p/n = \text{const} \rightarrow \quad n_2 = \frac{Q_{p2}}{Q_{s2}} n = \frac{10 \text{ L/s}}{8,8 \text{ L/s}} 1450 \text{ min}^{-1} = 1647 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{или} \quad Y_p/n^2 = \text{const} \rightarrow \quad n_2 = \left(\frac{Y_{p2}}{Y_{s2}} \right)^{\frac{1}{2}} n = \left(\frac{169,7 \text{ J/kg}}{131,6 \text{ J/kg}} \right)^{\frac{1}{2}} 1450 \text{ min}^{-1} = 1647 \text{ min}^{-1}$$

Да би се сачунала потребна снага пумпе у радној тачки RT_2 , сем протока Q_{p2} и напора Y_{p2} неопходно је одредити и степен корисности η_{p2} . Како се радна тачка RT_2 налази на радној карактеристици пумпе $Y_p^*(Q_p)$, која одговара брзини обртања $n_2 = 1647 \text{ min}^{-1}$, то се степен

корисности η_{p2} не може очитати са карактеристике $\eta_p(Q_p)$ која је дата за брзину обртања $n = 1450 \text{ min}^{-1}$, односно $\eta_{p2} \neq \eta_p(Q_{p2})!$

Проблем се може решити тако што се применом закона сличности срачуна нова карактеристика степена корисности $\eta_p^*(Q_p)$, која би одговарала брзини обртања $n_2 = 1647 \text{ min}^{-1}$ (види решење 3), па се са те карактеристике очита $\eta_{p2} = \eta_p^*(Q_{p2})$. Међутим, много је једноставније искористити чињеницу да дуж параболе сличности сем законитости $Q_p/n = \text{const}$ и $Y_p/n^2 = \text{const}$, важи и да је $\eta_p = \text{const}$, односно све тачке на параболи сличности имају једнаку вредност степена корисности! Према томе, степен корисности пумпе η_{p2} у радној тачки $RT_2(Q_{p2}, Y_{p2})$ једнак је степену корисности у сличној тачки $ST_2(Q_{s2}, Y_{s2})$ који се очитава са карактеристике $\eta_p(Q_p)$ за брзину обртања $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ (види слику у прилогу):

$$ST_2 \rightarrow \quad Q_{s2} = 8,8 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad \eta_{p2} = \eta_{s2} = 73,6 \%$$

Коначно, потребна снага пумпе износи:

$$P_{p2} = \frac{\rho Q_{p2} Y_{p2}}{\eta_{p2}} = 2,3 \text{ kW}$$

Напомиње се да се у индустријској пракси ретко срећу пумпни системи у којима се брзина обртања пумпе намерно повећава преко номиналне брзине обртања погонског електромотора. Ово стога што са порастом брзине обртања пумпе нагло расте и потребна снага па би погонски мотор пумпе морао унапред да буде димензионисан за тако увећане снаге.

Решење (3) – регулисање протока променом брзине обртања пумпе

Радна тачка система RT_3 добија се у пресеку карактеристике цевовода $Y_c(Q)$ и радне карактеристике пумпе $Y_p^{**}(Q_p)$ која одговара задатој брзини обртања $n_3 = 1300 \text{ min}^{-1}$. Са своје стране, карактеристика пумпе $Y_p^{**}(Q_p)$ добија се прерачунавањем радне карактеристике $Y_p(Q_p)$ при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ применом закона сличности:

$$Q_p^{**} = \frac{n_3}{n} Q_p \quad Y_p^{**} = \left(\frac{n_3}{n}\right)^2 Y_p \quad \eta_p^{**} = \eta_p$$

Резултати прерачунавања приказани су табеларно.

Радне карактеристике пумпе при $n = 1450 \text{ min}^{-1}$:

$\times \frac{1300}{1450}$	Q_p [L/s]	0	2	4	6	8	10	12	14
	Y_p [J/kg]	147	149	149	146	137	122	100	76
	η_p [%]	0	40	63	75	75	70	58	42

=

Радне карактеристике пумпе при $n_3 = 1300 \text{ min}^{-1}$:

$\times \left(\frac{1300}{1450}\right)^2$	Q_p^{**} [L/s]	0	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6
---	------------------	---	-----	-----	-----	-----	-----	------	------

Y_p^{**} [J/kg]	118,2	119,8	119,8	117,4	110,1	98,1	81,2	61,1
η_p^{**} [%]	0	40	63	75	75	70	58	42

Из радне тачке RT_3 читавају се проток, напор и степен корисности пумпе на основу којих се срачунава тражена потребна снага пумпе:

$$RT_3 \rightarrow \quad Y_{p3} = 114,3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad Q_{p3} = Q_3 = 6,3 \frac{\text{L}}{\text{s}} \quad \eta_{p3} = 76,1 \%$$

$$P_{p3} = \frac{\rho Q_{p3} Y_{p3}}{\eta_{p3}} = 0,95 \text{ kW}$$

Домаћи:

1. Нацртати карактеристику степена корисности пумпе при брзини обртања $n_2 = 1647 \text{ min}^{-1}$ која је добијена у решењу (2) и одредити вредност степена корисности $\eta_{p2} = \eta_p^*(Q_{p2})$ при протоку радне тачке RT_2 . Упоредити са решењем које је добијено под (2).
2. Одредити проток напор и потребну снагу пумпе при брзини обртања 1450 min^{-1} ако у резервоару B влада потпритисак $p_{vB} = 0,2 \text{ bar}$.
3. Одредити ону брзину обртања при којој пумпа ради са максималним степеном корисности. Оба резервоара су отворена. Колика је тада потребна снага пумпе?

